Le definizioni matematiche secondo Aristotele e la Logica matematica.

Nota di ANNIBALE PASTORE.

L'elaborazione logica delle scienze esatte, che è un vanto delle moderne teorie, ha messo in evidenza una questione che mi sembra sommamente interessante.

Gli autori della Logica matematica hanno formulato una teoria scientifica della definizione e sopratutto della definizione in matematica, e la maggior parte di essi opina che questa teoria sodisfa poco alla teoria aristotelica della definizione.

Ultimamente il Peano in una importantissima Memoria " Le definizioni in matematica „ (Institut de Ciencias, Barcelona, 1911) ha trattato la teoria delle definizioni matematiche, proponendosi di verificare se le definizioni matematiche sodisfino o no alle regole insegnate in Logica scolastica e a quali regole speciali sodisfino: quindi credo di far cosa grata ai filosofi ed ai matematici apprezzando punto per punto i risultati di questa trattazione dell'autorevole fondatore della scuola italiana di Logica matematica, per riconnettere i due estremi momenti della Storia della Logica e restituire ad Aristotele il suo merito. Le considerazioni che seguono furono scritte appunto con questo proposito e per invito dell'illustre Prof. G. Peano, a cui sommamente importa la libera critica in servigio della verità.

§ I. La prima regola riferita dalla Memoria del Peano è la seguente: *Ogni definizione è un'eguaglianza*. Questa regola è veramente capitale al metodo matematico.

Siccome è noto che i matematici annettono all'eguaglianza la proprietà *riflessiva* ($a = a$), *simmetrica* ($a = b$ è lo stesso che $b = a$) e *transitiva* (se $a = b$ e $b = c$ allora anche $a = c$), segue che anche per la definizione, sussistono queste medesime proprietà. Ma, considerando che la proprietà transitiva ha luogo solo quando una definizione sia posta in relazione con un'altra, e applicando

Digitized by Google

le due prime proprietà dell'eguaglianza alla definizione, noi diremo, — per la prima —, che " ogni ente della Def. è eguale a sè stesso „ — per la seconda — che " in ogni Def. si può sostituire il definito al definiente e reciprocamente „.

Ora circa la questione se questa prima regola della definizione — " *ogni definizione è un'eguaglianza* „ — con l'indicazione delle sue proprietà sia stata enunciata da Aristotele in modo esplicito o no (1), si possono fare le considerazioni seguenti. Anzitutto non risulta che Aristotele sia giunto a distinguere il concetto dell'eguaglianza da quello delle sue proprietà, benchè le varie proprietà dell'eguaglianza si trovino qua e là indicate per incidenza nelle sue opere e in due casi distinti, cioè, sia isolatamente, sia applicate al concetto della definizione. Nel primo caso poi l'eguaglianza è per l'ordinario confusa con " nè maggiore nè minore „. Questa espressione adombra la proprietà riflessiva. Però non risulta che Aristotele sia giunto a riconoscere che " eguale non significa nè maggiore nè minore „. Nel secondo caso la ricerca è agevolata da parecchi passi, i quali provano che Aristotele considera ogni definizione come un'eguaglianza, in primo luogo insistendo col " nè maggiore nè minore „ che ha rapporto colla proprietà riflessiva, in secondo luogo riconoscendo la sostituibilità, che è poi principio della proprietà simmetrica, come criterio della definizione.

Ciò posto, ecco in proposito le citazioni di Aristotele.

1° *Analyt. post.* II, 13, Bekker: (*Τῶν δὴ ὑπαρχόντων ἐν τῷ ὁρισμῷ*) *ἕκαστον μὲν ἐπὶ πλεῖον ὑπάρξει, ἅπαντα δὲ μὴ ἐπὶ πλέον· κ. τ. λ.* Il Trendelenburg traduce: " Eorum quidem, quae definitionem constituunt, unumquodque latius patebit, omnia vero conjuncta rem *exaequabunt*: etc. „; cioè: Delle note di una definizione ciascuna per sè si estende più del concetto (definito), ma *tutte insieme non si estendono di più*. Il Trendelenburg ha tradotto senz'altro " exaequabunt „ in modo certo un po' arbitrario. Ma il passo seguente toglierà ogni dubio in proposito.

2° *Δῆλον γὰρ ὅτι οὔτε πλεῖον πρόσκειται· πάντα γὰρ ἐν τῷ τί ἐστιν εἴληπται τούτων· οὔτε ἀπολείπει οὐδέν· ἡ γὰρ γένος*

(1) Il Peano riconosce che questa regola si trova implicita in Aristotele e cita i due passi *Top.* VI, 1. *idem* VII, 7, nei quali l'espressione aristotelica è veramente indeterminata.

Digitized by Google

ἡ διαφορὰ ἂν εἴη (*Analyt. post.* II, 12): " Nam perspicuum est, quod (hac ratione) neque abundet definitio, quum omnia horum ratione eius quid est sumpta sint, nec deficiat aliquid; si quidem aut genus, aut differentia fuerit „.

Qui è evidentemente espressa la proprietà riflessiva e in modo diretto applicata al caso della definizione (1).

3° *Ἔστι δὲ χαλεπώτατον τὸ ἀντιστρέφειν τὴν ἀπὸ τοῦ συμβεβηκότος οἰκεῖαν ὀνομασίαν... Ἀπὸ μὲν γὰρ τοῦ ὅρου, καὶ τοῦ ἰδίου καὶ τοῦ γένους ἀναγκαῖον ἀντιστρέφειν* (*Top.* II, 1): " Difficillimum autem est convertere appellationem propriam ab accidente (ductam)..... A definitione autem et a proprio et genere conversionem institui necesse est „.

Qui è in modo esplicito riconosciuta la necessità che la definizione (*ὅρος*) goda della proprietà simmetrica dell'eguaglianza, essendo notissimo che, per Aristotele, *ἀντιστρέφειν* un giudizio significa porre il soggetto nel luogo del predicato, e il predicato nel luogo del soggetto (2).

4° Un altro passo, che riconferma la necessità dell'*ἀντιστρέφειν* nel caso della definizione, è il seguente, in cui, dopo

(1) Quanto al concetto dell'eguaglianza espresso qui con " *οὔτε πλεῖον πρόσκειται, οὔτε ἀπολείπει οὐδέν* = neque abundet definitio, nec deficiat aliquid „, cfr. i passi segg. che determinano, senza ambiguità, il senso di *ἴσον* con queste e siffatte perifrasi:

τὸ ἴσον πρὸς μὲν τὸ ἔλαττον μεῖζον πρὸς δὲ τὸ μεῖζον ἔλαττον,

quod aequale est, cum eo quod minus est comparetur maius est, sin cum majore minus (*Eth. Nic.* II, 8);

τὸ ἴσον· τοῦ μὲν ἐλάττονος μεῖζον, του δὲ μεῖζονος δὲ ἔλαττον,

aequale minore quidem majus, majore vero minus (existit) (*Eth. eud.* II, 3);

καθάπερ τὸ ἴσον καὶ τὸ μέτριον τῷ ὑπερέχοντι καὶ τῷ ὑπερεχομένῳ,

quemadmodum aequale et mediocre (opponitur) ei quod exsuperat et ei quod superatur (*Natur. auscul.* VIII, 7);

τὸ δ' ἴσον μέσον τι ὑπερβολῆς καὶ ἐλλείψεως,

aequum autem quidem medium est inter excessum et defectum (*Eth. Nic.* II, 6);

τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ ἴσον· ἐν ὁποίᾳ γὰρ πράξει ἐστὶ τὸ πλέον καὶ τὸ ἔλαττον,

hoc autem aequum (seu aequale); in quacumque enim actione plus est et minus (*Eth. Nic.* V, 3).

(2) Cfr. insup. *Analyt. pr.* I, 2; *Top.* VIII, 12. — Per *ὅρος* = definitio, cfr. *Analyt. pr.* I, 27.

Digitized by Google

d'aver parlato del sillogismo e della definizione, si conchiude: *ταῦτα δ' ἀνάγκη ἀντιστρέφειν* (*Analyt. post.* II, 4): " Haec vero necesse est reciprocari „.

Per queste citazioni l'accordo tra la Logica aristotelica e la Logica matematica sopra la prima regola della definizione (*ogni definizione è un'eguaglianza*) risulta dimostrato.

§ II. Assodato questo primo punto, passiamo ad un'altra ricerca. Secondo il Vailati la regola *per genus et differentiam* è " priva di valore intrinseco „ (1). Il Couturat scrive: " ...les concepts géométriques ne sont jamais définis *per genus et differentiam*, mais le plus souvent *per generationem* „ (2); e altrove: " ...les concepts de nombres ne se laissent pas définir *per genus et differentiam*, ni décomposer en facteurs logiques, ils ne se laissent pas non plus combiner par le procédé de la multiplication logique. Cela ne prouve qu'une chose: l'étroitesse et l'insuffisance de la Logique classique „ (3). Il Peano, trattando espressamente della regola aristotelica, riconosce che " qualche definizione matematica sodisfa alla regola aristotelica. Ma — aggiunge — tale regola si può applicare al più alla definizione di una classe. ...Perciò la regola del *genus proximum et differentia specifica*, che non si applica nella maggioranza dei casi, non può essere una regola „ (4).

---

(1) Vailati, *Aggiunte alle note storiche del " Formulario „* R. d. M., Tom. VIII, N. 3, pag. 59.

(2) Couturat, *Les principes des Mathématiques*, Paris, Alcan, 1905, p. 290.

(3) Id., ib, pag. 262.

(4) Peano, *Le def. in mat.*, pag. 4-5. Il Vailati ha cercato di salvare in certo modo l'autorità di Aristotele affermando che: " è a Porfirio, se non anche a qualche più antico commentatore, che andiamo debitori dell'enunciazione della nota regola che " ogni def. debba procedere *per genus et differentiam* „, regola la quale, oltrecchè priva di valore intrinseco non poteva trovare appoggio nell'autorità di Aristotele, il quale parla anzi più d'una volta delle varie *differentiae* (*διαφοραί*), che possono figurare in una stessa definizione „ (Cfr. *Aggiunte* etc. l. c.). Lo stesso concetto trovasi ribadito in *La teoria aristotelica della definizione*, Rivista di Filosofia e scienze affini, Nov.-dic. 1903. Ma è evidente che al Vailati sfuggì il notissimo passo aristotelico: *ὁ ὁρισμὸς ἐκ γένους καὶ διαφορῶν ἐστιν*, *Top.* I, 8, ed altri analoghi come: *Δεῖ γὰρ τὸ μὲν γένος ἀπὸ τῶν ἄλλων χωρίζειν, τὴν δὲ διαφορὰν ἀπό τινος τῶν ἐν τῷ αὐτῷ γένει* (*Top.* VI, 3): *Δεῖ μὲν διὰ τοῦ γένους καὶ τῶν διαφορῶν ὁρίζεσθαι τὸν καλῶς ὁριζόμενον, ταῦτα δὲ τῶν ἁπλῶς γνω-*

Digitized by Google

Ma questa questione del valore della seconda regola aristotelica *per genus et differentiam* non può essere accuratamente ridotta senza nuove indagini, tanto sulla natura del processo definitorio in matematica, quanto sul significato della regola aristotelica.

Discutiamo questi due lati della questione.

Sappiamo da (I) che ogni definizione è un'eguaglianza.

È noto altresì che non ogni eguaglianza è una definizione. Per esempio, delle numerosissime eguaglianze in pag. 34-35 del *Formulario mathematico*, Editio V, due sole sono date come definizioni. Quindi si possono determinare le condizioni che devono essere sodisfatte affinchè un'eguaglianza sia una definizione possibile. Dfp del *Formulario*, pag. 14.

Queste condizioni (proprietà caratteristiche della definizione) si ricavano dalla definizione della definizione.

Per definizione s'intende una proposizione della forma

$$x = a$$

ove x è il segno (o gruppo di segni) che si vuol definire, a è un gruppo di segni noti, vale a dire " un'espressione composta con parole o segni supposti prima noti „ (1).

Avendo già fatto in (I) l'analisi del segno $=$, facciamo l'analisi del segno a, cioè del definiente.

Per definiente s'intende " un gruppo di segni noti „.

a) Cominciamo dal termine " gruppo „. Di questo termine si distinguono tre significati. " Gruppo „ in alcune teorie significa classe; in altre " gruppo di funzioni „ o " classe di operazioni „ tale che il prodotto funzionale di due individui di essa appartenga alla classe stessa; in altra, successione di segni noti. Possiamo ridurre ad uno i due primi significati, ponendo che " ogni definiente = classe „ (sia che si tratti di classi di indi-

---

ριμωτέρων καὶ προτέρων τοῦ εἴδους ἐστίν (*Top.* VI, 4). Dai quali passi anche si rileva che la pluralità possibile delle differenze è in modo esplicito indicata da Aristotele col plurale *διαφορῶν*. Però i successori di Aristotele, sostituendo il singolare al plurale, vollero certo significare " tutto ciò che costituisce la differenza specifica „ nel definiente. Così non si distaccano dallo spirito del maestro.

(1) PEANO, *Le def. in mat.*, pag. 3.

Digitized by Google

vidui, sia che si tratti di classi di funzioni e operazioni espresse in una proposizione). Il riconoscimento di questo senso lato del concetto " classe „ è richiesto dal concetto stesso della definizione, sempre che non si voglia intendere per definizione una pura e semplice imposizione di nomi a cose già note, ma più tosto la determinazione di talune proprietà sufficienti a qualificare i definiti in ordine ai fini deduttivi che si vogliono raggiungere (1). La semplice imposizione di nomi ha luogo nelle definizioni della matematica superiore; in matematica elementare invece, come avverte il Peano, la definizione è la classificazione ordinata delle idee e dei nomi che già si hanno.

Il terzo significato del termine " gruppo „ importa che i segni noti del definiente siano, non uno, ma più. Ora, per la definizione della definizione, è noto che questi segni devono insieme sodisfare a quelle condizioni che trasformano una eguaglianza in una definizione possibile. Con questo non si vuol dire che tra i segni noti del definiente passi ancora una relazione o una condizione. Scrivendo, ad es.,

$$3 = 2 + 1,$$

fra i segni 2, +, 1 passa nessuna relazione, nessuna condizione. Soltanto si vuol notare che non si vede perchè l'espressione " $3 = 2 + 1$ „ dovrebbe essere considerata come una definizione qualora i segni " 2, +, 1 „ non fossero *precisati antecedentemente*, e che è questa la condizione del gruppo di cui si tratta.

Ciò posto, siccome è noto che data una condizione risulta determinata una classe e viceversa, segue che anche il terzo significato del termine gruppo si riduce a classe. Esprimiamo questo risultato, dicendo che " gruppo di segni noti „ significa " classe (in senso lato) di segni noti „, e assorbendo nel terzo i due anzidetti significati del termine " gruppo „.

Passando ora alla teoria aristotelica della definizione, basta notare che Aristotele attribuiva al termine " *γένος* „ del definiente quel medesimo significato che qui si attribuisce al termine " classe „. È vero che questo senso fu poi mascherato da

(1) M. Pieri, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo*. Mem. Accad. R. delle scienze di Torino, 1898-99, pag. 173-174 in *nota*.

Digitized by Google

una fitta aggiunta di interpretazioni filosofiche, che hanno fatto perdere di vista lo scopo principale e la portata strettamente logica della regola aristotelica. In questo ha perfettamente ragione il Vailati di scrivere nel suo studio sopra *La teoria aristotelica della definizione*: " Per ciò che riguarda poi le successive variazioni di significato che i suddetti termini tecnici della logica aristotelica (*γένος, ὅρος, ἴδιον, συμβεβηκός*) hanno subíto nel passare, dalla scolastica, nella nomenclatura filosofica moderna, è da notare come la parola " genere „ (insieme s'intende alle sue corrispondenti in ciascuna lingua colta moderna) ha perduta pressochè ogni traccia del senso tecnico particolare che Aristotele aveva tentato di attribuirle „ (1).

Da questa breve discussione si vede che ancora non cessa la corrispondenza fra la teoria aristotelica e la teoria logico-matematica quanto all' interpretazione di questa proprietà del definiente, atteso che " *γένος* = gruppo = classe „ in senso lato, cioè comprendente ogni sorta di enti (numeri, classi, proposizioni, condizione, relazione, ecc.) che si possono classificare in ordine ai fini che si vogliono ottenere.

b) Ma occorre estendere l'analisi anche all'espressione " termini (enti o segni) prima noti „.

Immediatamente si scorge l'equivalenza di questa espressione con quella aristotelica: *Δεῖ μὲν διὰ τοῦ γένους καὶ τῶν διαφορῶν ὁρίζεσθαι τὸν καλῶς ὁριζόμενος, ταῦτα δὲ τῶν ἁπλῶς γνωριμωτέρων καὶ προτέρων τοῦ εἴδους ἐστίν* (*Top.* VI. 4): " Qui scite definit, eum oportet ex genere et differentiis definire: haec enim in eorum numero sunt, quae sunt ipsa specie *et notiora et priora* simpliciter „ (T.). Aristotele dice esplicitamente che il genere e le differenze del definiente sono *γνωριμώτερα καὶ πρότερα τοῦ εἴδους*, cose più note e prima del definito. Che poi l'applicazione di questo criterio (della precedente notizia dei termini del definiente) al caso delle operazioni matematiche sia intesa e voluta dallo stesso Aristotele, appare dalla citazione seguente: *Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ, ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου*

(1) VAILATI, *La teoria aristotelica della definizione*, Rivista di filosofia e scienze aff., 1903, Nov.-dic., estr. pag. 9-10.

Digitized by Google

τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν (*Analyt. post.* I, 1): " Omnis doctrina et omnis disciplina, quae quidem in ratione est posita, ex antecedenti fit cognitione; id quod considerantibus patebit universas; nam hoc modo et mathematicae scientiae existunt et ceterarum artium unaquaeque „ (T.). " Ogni insegnamento ed ogni apprendimento razionale si fa mediante una cognizione antecedente. Ciò è evidente a chi consideri tutte le scienze; poichè è in tal modo che si formano le matematiche e ciascuna delle rimanenti arti „. — Le citazioni aristoteliche poi che confermano questo punto (*definitio per priora et notiora fieri debet*) sono così numerose ed esplicite che resta impossibile ogni dubio.

c) Resta infine da esaminare l'ultimo punto relativo alla questione della " *differenza* „, che è capitale nella teoria aristotelica, ma non appare nella teoria moderna.

Dire che ogni definizione ha la forma:

$$\text{definito} = \text{definiente},$$

ove il secondo membro è un gruppo di segni noti, non significa che *un gruppo qualunque* di segni basti a costituire il definiente. E nè pure basterebbe dire che in ogni caso " il definiente deve essere eguale al definito „, giacchè se il definito non è che un nome, invano si cerca di attribuire un senso alla necessità di *eguagliare* una formula di segni noti ad un nome. Occorre invece tener conto, non del nome che tiene il posto del definito, ma di *quell'*ente che è individuato dalla formula scritta del definiente e a cui si vuole imporre il nome del definito. Occorre insomma riconoscere che il secondo membro della definizione ha un valore in sè, sia o non sia un numero o una classe di individui, o un gruppo di operazioni, o una pura successione di segni noti.

Chiamando " differenza „ (διαφορά) quel valore (condizione, proprietà, classe in senso lato) del definiente che serve a differenziare il definito, cioè ad individuarlo fra gli altri enti possibili, cioè designabili pure con un gruppo di segni noti (γένος), si ottiene l'accordo tra la teoria moderna della definizione, e la teoria aristotelica anche su questo punto.

Valendoci di queste riduzioni, facendo cioè alla prima condizione generica della " precedente notizia dei segni noti „ cor-

Digitized by Google

rispondere il γένος e alla seconda condizione specifica di " quel valore che serve a caratterizzare il definito „ la διαφορά, ed eguagliando il definito al prodotto logico di queste due classi in senso lato, risulta che ogni definizione può assumere la forma:

$$x = \gamma\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma \cap \delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}.$$

Raccogliendo i risultati della discussione sui tre punti *a) b) c)* che compongono il definiente, si ottiene la determinazione delle proprietà caratteristiche della definizione, cioè di quelle condizioni che devono essere sodisfatte affinchè la definizione non si confonda coll'eguaglianza, essendo noto che non ogni eguaglianza è una definizione.

Inoltre si scorge che la prima regola (*ogni definizione è un'eguaglianza*) costituisce il γένος di ogni definizione, la seconda regola (prodotto logico del γένος e della διαφορά) costituisce la διαφορά.

Ciò posto, consideriamo alcuni esempj.

Sia la definizione del Numero primo:

" Numero primo = Numero divisibile solo per sè e per l'unità „.

Il definiente può interpretarsi così: " Numero „ = genere prossimo; " divisibile solo per sè e per l'unità „ = differenza specifica.

Sia la definizione comune del numero *e* base dei logaritmi neperiani, riportata dal Peano (*Le def.*, etc., pag. 1):

$$e = lim\,(1 + 1\ m)^m \ per\ m\ infinito.$$

Parrebbe naturale lo scrivere:

$$e = Numero \cap lim\,(1 + 1\ m)^m \ per\ m\ infinito.$$

Ma questa scrittura darebbe luogo a parecchie improprietà opportunamente rilevate dal Peano. Anzitutto è da notare che l'aggiunta di *numero* a *limite* in generale può essere inesatta e qui è oziosa; tanto varrebbe aggiungere *numero irrazionale anzi trascendente compreso fra 2 e 3*, tutte proprietà che discendono dalla definizione usata da tutti i matematici. Inoltre è contrario alle convenzioni della logica matematica lo scrivere il segno ∩

Digitized by Google

fra *numero* e *lim*, perchè $\cap$ si scrive solo per classi, e *lim* non è una classe. Però si possono evitare queste improprietà scrivendo:

$$e = \iota\,[Numero \cap \iota\ lim\,(1 + 1/\mathrm{m})^{\mathrm{m}}\ per\ \mathrm{m}\ infinito]$$

e di Eulero è *quel* numero che è *il* limite, ecc.

Così, malgrado l'apparente difficoltà della traduzione, l'esempio su detto è ricondotto all'interpretazione aristotelica; giacchè coi due segni ι e ι (ἴσος) l'aggiunta *numero* diventa giustificabile, e per conseguenza il genere e la differenza restano designati senza ambiguità.

Analogamente può interpretarsi la definizione della costante di Eulero riferita dal Peano, e in generale ogni definizione matematica, avvertendo però che è necessario esplicare i termini quando siano sottintesi nel definiente, come per l'ordinario accade. Si ammetterà che non è questo un sotterfugio per completare ad ogni costo l'equivalenza delle due teorie. Il procedimento da seguirsi per interpretare aristotelicamente le definizioni in matematica è quindi indicato senza incertezza, ed è valido per tutti i casi.

Consideriamo ora brevemente una objezione che si potrebbe rivolgere contro questa tesi.

Si dirà che, mentre Aristotele dichiara, come fu già riferito più sopra, che: " Delle note di una definizione ciascuna per sè si estende più del concetto (definito), ma tutte insieme non lo superano „, date le Df. seguenti:

$$2 = 1 + 1\,, \qquad \pi = 4\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots\right),$$

invano si cerca che ogni idea del secondo membro sia più estensiva del primo, e che il tutto non lo sia di più.

Ma applicando i criterj anzi detti la cosa cambia. Infatti, anzitutto bisognerà tradurre aristotelicamente queste definizioni, aggiungendo al secondo membro la nota della classe " Numero „, cioè di quella classe o gruppo generico (γένος) di cui si tratta.

Quindi bisogna scorgere in " $1+1$ „ e in " $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$ „ un gruppo di parole o segni prima noti.

Ma dire " gruppo di segni prima noti „ significa, come vedemmo, " γένος τῶν προτέρων καὶ γνωριμωτέρων.

Digitized by Google

La duplice condizione della " classe „ e della " precedente e maggiore notizia „ dei segni del definiente non è scritta nelle due definizioni:

$$2 = 1 + 1, \qquad \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right).$$

tuttavia deve essere sodisfatta in entrambe " per definizione della definizione „, altrimenti le due espressioni non sarebbero che due eguaglianze.

Analogamente la condizione della " *διαφορά* „ sussiste per la semplice posizione di quella relazione o condizione " $1 + 1$, $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$ „ che sussiste per tutti i segni noti del gruppo posto e basta ad individuare il definito, indicandone il valore, cioè il modo specifico della sua costruzione.

Quanto alla maggior estensione d'ogni idea del secondo membro in confronto del definito, è evidente che — rispetto al genere " Numero „ — la cosa non ha bisogno di dimostrazione, perchè " 2 „ non è che " un individuo della classe Numero „; e analogamente dicasi di " π „.

Rispetto poi alla differenza che vien costituita dalle espressioni " $1 + 1$ „ e " $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$ „, l'anzidetta condizione della " precedente e maggiore notizia „ supposta nei segni del definiente significa a punto che ogni segno del definiente deve avere estensione maggiore del definito.

Quanto infine alla condizione che tutti insieme abbiano estensione nè maggiore nè minore del definito, bastano gli schiarimenti ed i passi aristotelici riferiti per la regola dell'eguaglianza (§ I).

In conclusione, anche il secondo punto sembra saldamente stabilito da quanto precede. Per conseguenza, bisogna guardarsi dal credere che la teoria aristotelica della definizione per genere e differenza non abbia diritto di essere apprezzata alla luce di quelle condizioni necessarie e sufficienti che costituiscono la validità d'ogni definizione scientifica.

Digitized by Google

§ III. Consideriamo ora rapidamente dodici questioni minori o almeno laterali, rispetto al confronto che vogliamo stabilire.

1ª È noto che Aristotele classifica le definizioni in *reali* e *nominali*. Ora in P. (*Le def. in mat.*, pag. 4) si afferma che " in matematica tutte le definizioni sono nominali „. Ma sarà forse utile ricordare che con tal classificazione Aristotele lascia affatto impregiudicata la questione della natura e del valore nominale o reale delle definizioni matematiche. Aristotele non nega che tutte le definizioni matematiche siano nominali, non afferma che in matematica vi siano definizioni reali. La classificazione aristotelica accennata ha senso metafisico: quindi su questo punto non può riscontrarsi il minimo disaccordo con la teoria moderna della Logica-matematica.

2ª Si afferma che " Aristotele combatte le *definizioni negative* „ mentre " le definizioni negative sono numerose in matematica e sono generalmente considerate esatte „ (Cfr. P., *op. cit.*, pag. 5). E si adduce il fatto che Aristotele combatte la definizione della linea adottata da Euclide: *Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές*. Ma è d'uopo ritenere che Aristotele critica questa definizione anche perchè ritiene che il definiente non sia *γνωριμώτερον* nè *πρότερον* del definito. E questo s'accorda *forse* con quello che afferma la Memoria a pag. 6, " conviene certo far a meno delle definizioni di *linea* e di *retta*, che sono oggi sempre più controverse „. Infine è da notarsi che se è vero che " sonvi in Matem. definizioni negative perfettamente rigorose „, questa affermazione non è punto contraria alla teoria di Aristotele, anzi non è che prettamente ed esplicitamente aristotelica, perchè Aristotele non esclude la possibilità delle def. negative. Tanto è vero che egli scrive: *δεῖ δὲ μὴ λανθάνειν ὅτι ἔνια ἴσως οὐκ ἐστιν ὁρίσασθαι ἄλλως, οἷον τὸ διπλάσιον ἄνευ τοῦ ἡμίσεος, καὶ ὅσα καθ' αὑτὰ πρός τι λέγεται* ... *Top.* VI . 4; Sed nonnulla fortasse aliam definiendi viam non habere latere non debet, velut duplum sine dimidio et omnium, quae per se ad aliquid referuntur, alterum sine altero intellegi non potest, cioè: Ma non si nasconda che alcune cose non possono altrimenti definirsi; per esempio, il doppio non si definisce senza la metà, e delle cose relative, l'una senza l'altra, etc. Donde segue che anche le defin. negative Legendre-Cantor, p. e., sono coerenti

Digitized by Google

alla dottrina aristotelica perchè il curvo e il retto, il semplice e il composto, l'infinito e il finito sono concetti relativi, cioè tali " che l'uno non può conoscersi senza l'altro „ *ὥστε ἀδύνατον ἄνευ θατέρου θάτερον γνωρίζειν.*

3ª Un altro tratto interessantissimo messo in luce dalla teoria moderna è quello che riguarda *l'esistenza della cosa definita.* Non si dice che Aristotele affermi " che si deve solo definire cose esistenti „, ma si critica giustamente l'opinione di Stuart Mill il quale, avendo a punto quest'idea, " parte dalla definizione di cosa non esistente e, supponendola esistente, arriva a risultato assurdo „. Ora il Peano, in questo, s'accorda con Aristotele. Ma per comprendere bene questo punto si rifletta sul significato della non esistenza della cosa definita, secondo il Peano. Molto ragionevolmente egli osserva che " la parola *esiste* ha più significati. La classe nulla rappresenta una classe in cui non esistono individui, ma essa esiste; così il numero *0* può indicare o l'assenza di grandezza o la grandezza *0*. In pratica conviene determinare non solo cose esistenti, ma importanti „ (pag. 6). Da ciò risulta che quelle cose non esistenti di cui si dànno in matematica numerose definizioni, non esistono nel senso della sussistenza ovvero esistenza concreta e reale, ma tuttavia sono; attesochè, *essere* ed *esistere*, non possono, in siffatto contrasto, prendersi nel senso che loro è comune, senza equivoco. Ma questa distinzione è famigliare ad Aristotele, il quale non confonde mai l'*essentia* (*τὸ τί ἐστιν*) con l'*exsistentia* (*τὸ εἶναι*). A significare l'essenza Aristotele usò diverse maniere di dire come *οὐσία*, *τὸ ὅτι*, *τὸ τί ἦν εἶναι* (che nel medioevo viene detta *quiditas*, quidità) e criticò gli antichi che trascurarono di definirla. I passi poi che provano che, secondo Aristotele, queste cose benchè non esistenti materialmente come oggetti reali sono tuttavia definibili scientificamente, sono numerosissimi (Cfr. per tutti: *ὁρισμὸς μὲν γὰρ τοῦ τί ἐστι καὶ οὐσίας* (*Analyt. post.*, II, 3)). Questa dichiarazione significa che le cose, non esistenti, ma essenti, sono oggetto della definizione.

4ª e 5ª. Rispetto alle *definizioni delle cose chiare* e alle *definizioni finite*, nulla si trova nella teoria moderna che non si accordi colla teoria aristotelica. Quanto all'osservazione del Poincaré " che non si debbano mai introdurre enti che non si possano definire completamente con un numero finito di parole „

Digitized by Google

(P., *Le d. in m.*, pag. 7) è forse non inutile avvertire che le definizioni che involgono l'idea dell'infinito si applicano certo ad un numero infinito di *individui*, mentre ciò non importa che esse debbano esser composte di un numero infinito di parole. Siccome nelle def., come osserva Leibniz, *de ideis loquimur non de individuis*, segue che il numero finito delle parole componenti il definiente non impedisce che il definito si applichi ad un numero infinito di individui. Quindi la dichiarazione del Poincaré è senza fondamento logico.

6ª Ma un punto veramente nuovo è quello che si riferisce alle *definizioni possibili*. Invano si cercherebbe di Aristotele qualche accenno. Però è da notarsi che questa teoria è un elegante sviluppo del concetto della definizione — eguaglianza, conforme alla teoria aristotelica.

7ª Un altro grande merito della Logica matematica è la teoria delle *idee primitive*, di cui si trovano è vero molti impliciti riferimenti in Aristotele, senza però che niuno di essi acquisti quel carattere saliente che costituisce l'originalità della moderna teoria. Infatti anche Aristotele riconosce ben chiaramente che l'analisi della definizione conduce da un lato ai concetti più generali (*κατηγορίαι*), dall'altro ai dati della sensibilità; e che colla analisi del pensiero non si può andare all'infinito: *τὰ δ' ἄπειρα οὐκ ἔστι διεξελθεῖν νοοῦντα* (*Analyt. post.* I, 22). Quindi aggiunse: *Ἔστι δὲ ἀληθῆ μὲν καὶ πρῶτα τὰ μὴ δι' ἑτέρων ἀλλὰ δι' αὐτῶν ἔχοντα τὴν πίστιν · οὐ δεῖ γὰρ ἐν ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρχαῖς ἐπιζητεῖσθαι τὸ διὰ τί, ἀλλ' ἑκάστην τῶν ἀρχῶν αὐτὴν καθ' ἑαυτὴν εἶναι πιστήν* (*Top.* I, 1). Però egli dichiarò apertamente: *τὰ πρῶτα ὁρισμοὶ ἔσονται ἀναπόδεικτοι* (*Analyt. post.* II, 3), cioè: " Le cose prime si definiscono, ma non si dimostrano „. Solo per la dimostrazione giunse a proclamare: *Ὅλως μὲν ἁπάντων ἀδύνατον ἀπόδειξιν εἶναι* (*Metaph.* IV . (*Γ*) 4), cioè: " Non tutte le cose possono dimostrarsi „. Da ciò risulta, senza dubio, che la recente teoria delle idee primitive costituisce un originale pregio della Logica matematica.

8ª Ma il fatto che questi recenti sviluppi della Logica matematica rispetto alle definizioni, come del resto molti altri tra i più notevoli calcoli trattati dall'elaborazione moderna della Logica, non si trovino menzionati nell'opera di Aristotele, non rende per nulla meno importante il rilevare come tanti altri punti si tro-

Digitized by Google

vino invece investigati sotto il loro aspetto matematico vero e proprio, sopra tutto negli *Analitici primi* e *secondi*. E valga per tutti la teoria del Sillogismo che ha in Aristotele un fondamento ed una trattazione matematica, qual si poteva pretendere in quella remotissima età (1). E questo rilievo, che però esorbita dal campo prefisso della definizione, viene aggiunto solo per far capire che, se Aristotele non seppe restare nel campo scientifico della logica esatta, ciò derivò senza dubio dal fatto che egli non volle trascurare le applicazioni della logica comune. Tale non è certo, almeno per ora, il proposito espresso della Logica matematica nel senso stretto della parola. Quindi è giusto ricordare che, siccome la Logica matematica è propriamente la scienza che tratta solo delle forme di ragionamento che si incontrano nelle varie teorie matematiche riducendole a formole simili alle algebriche, si presenta anche la questione di verificare se non sia possibile, oltre a questo còmpito, darle quello di trattare della formalità logica in generale collo *strumento* della formalità matematica. Questo problema è però stato in parte affrontato dal Boole e dallo Schröder; e mi pare che anche la Logica matematica in senso stretto, sotto il potente impulso del Peano il quale rinnova e feconda gli ardimenti di Leibniz con propositi strettamente scientifici e largamente filosofici, si vada ora avviando a questa grande ricerca, promovendo lo studio e la diffusione dell'interlingua. Infatti " es semper plus patente quod logica es basi de interlingua „ come dichiara lo stesso Peano, che è a punto " Directore de Academia pro interlingua „. Rendendo rapido conto dell'importante articolo di A. Padoa (2), egli rileva che " Auctore vide ligamen inter logica matematica et interlingua, et desidera que interlingua es non solo expressione, sed analysi de cogitatione „.

9ª Ma anche se si esamina sommariamente *il calcolo delle classi*, istituito dalla Logica matematica, risulta evidente che nessuna legge contradice allo spirito della Logica aristotelica. Potrebbe senza dubio objettarsi dalla maggior parte degli autori

---

(1) Cfr. *Sillogismo e Proporzione*. Contributo alla teoria ed alla storia della Logica pura. Torino, ed. Bocca, 1910.

(2) A. Padoa, *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*, Revue de Métaphysique et de Morale, Nov. 1911, pag. 828-883.

Digitized by Google

che vi contradice la così detta proprietà o legge di semplicità " $a \cap a = a$ ". Ma per contro non sarebbe difficile dimostrare che tale legge è un principio pseudologico. L'affermazione della validità di questa legge non è che un puro arbitrio descrittivo (1).

Del resto, si potrebbe ancora notare che coll'introduzione degli enti e delle relazioni e operazioni della Logica matematica si fanno rientrare, nel calcolo logico, con nome diverso, tanto la teoria del concetto, quanto la teoria del giudizio della Logica aristotelica. Ma questa ricerca esigerebbe uno studio assai lungo e diverso dal proposito attuale.

10ª Quanto all'affermazione della Logica matematica che *ogni definizione dev'essere simbolica*, ognuno sa che anche Aristotele riconobbe l'utilità dei simboli logici, e in parecchi casi ne fece uso costante e rigoroso. Quindi anche questo canone non è contrario allo spirito della dottrina aristotelica.

11ª Un'altra distinzione moderna invece alla quale non può trovarsi ben fondata corrispondenza nella teoria aristotelica è quella che riguarda *l'omogeneità delle definizioni*. Invano si cerca di dare un valore qualunque al seguente ragionamento: che questa regola sia solo apparentemente nuova perchè si riduce al caso della definizione *per genus*, ove la ragione della omogeneità dei termini della definizione risulterebbe evidente, e perchè Aristotele richiama continuamente le cose *ἐν ταὐτῷ γένει*. Questo principio aristotelico è del resto persino socratico, perchè sappiamo da Senofonte che Socrate soleva *διαλέγειν κατὰ γένη*. Ed anche si potrebbe addurre che Aristotele senza posa ricorda che l'omogeneità nella definizione non deve essere mai oltrepassata: *μὴ ὑπερβαίνειν τὰ γένη*. Ma in fondo è giocoforza riconoscere che tra la nuova regola dell'omogeneità scoperta dal Peano, la quale importa la pratica delle funzioni di matematica o lettere variabili, e il canone socratico-aristotelico *κατὰ γένη* c'è di comune solo il nome.

12ª Infine la Logica matematica ricorda, trattando dell'*uti-*

(1) Cfr. per la dimostrazione di questa tesi la mia Memoria: *Sulla natura extralogica delle leggi di tautologia e di assorbimento nella Logica matematica*, Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, 1909, vol. III.

Digitized by Google

lità delle definizioni, che il metodo della sostituzione è il migliore per riconoscere l'esattezza della definizione. Orbene è da notarsi che questo metodo fu conosciuto, praticato e consigliato, con esempi diretti, anche da Aristotele. Il quale dice: " Affinchè un tal difetto (inesattezza della def.) diventi manifesto, bisogna mettere il concetto nel luogo del nome, per esempio etc. „: *δεῖ δ' ὅπως φωραθῇ τὰ τοιαῦτα μεταλαμβάνειν ἀντὶ τοῦ ὀνόματος τὸν λόγον . οἷον κ. τ. λ.*

Top. VI, 4. Ed anche la legge pratica (*principio di permanenza delle leggi formali*, che si potrebbe anche dire dell'unità del calcolo) è perfettamente conveniente così alla lettera come allo spirito della teoria aristotelica.

Da questa sommaria esposizione risulta che le definizioni matematiche sodisfano alle due fondamentali regole insegnate dalla Logica aristotelica, cioè alla regola dell'eguaglianza e a quella del genere e della differenza dei segni più noti e prima noti, che insieme determinano le proprietà generali e speciali della definizione.

Però bisogna convenire che Aristotele, oltre a queste due regole, ha dato una quantità d'altri precetti non esclusivamente logici e perciò oziosi al metodo matematico, che abbiamo perfino trascurato di annoverare nell'indagine precedente. Quanto agli altri dodici punti messi in chiaro nella Memoria del Peano, si può stabilire che l'accordo tra la Logica aristotelica e la Logica matematica si verifica nella maggioranza dei casi o direttamente o indirettamente. Ma i tre punti caratteristici " delle definizioni possibili, delle idee primitive e dell'omogeneità delle definizioni „, dovuti quasi per intero all'opera del Peano, benchè non contrastino collo spirito della Logica aristotelica, tuttavia rappresentano tre originali sviluppi della Logica matematica, ai quali invano si cercherebbe una ben fondata corrispondenza nella teoria aristotelica della definizione.

Digitized by Google

Digitized by Google